Analiza funkcjonalna

Rozwiązania zadań z drugiego kolokwium

Zestaw A

1. Niech X oznacza przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych określonych na półprostej $[0, \infty)$ (z normą supremum). Określmy odwzorowanie $A : X \to X$ następująco:
$$(Af)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds.$$
Pokazać, że A jest operatorem liniowym ciągłym. Obliczyć jego normę.

   Rozwiązanie: Liniowość A jest oczywista. Ciągłość operatora jest równoważna jego ograniczoności, sprawdźmy zatem, jak norma Af ma się do normy f. Dla dowolnego t mamy
$$|(Af)(t)| = \left| \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right| \leq \frac{1}{t} \int_0^t |f(s)| \, ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|f\|_\infty \, ds = \|f\|_\infty ,$$
zatem $\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, czyli A jest operatorem ograniczonym i $\|A\| \leq 1$. Co więcej, dla funkcji f stale równej 1 dostajemy $Af = f$, czyli norma A wynosi dokładnie 1.

2. Wiadomo, że każdy ciąg $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \ell^\infty$ wyznacza funkcjonał $P_\alpha \in \ell_1^*$ zadany wzorem $P_\alpha(x) = \sum \alpha_n x_n$. Pokazać, że funkcjonał ten osiąga swoją normę na sferze jednostkowej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie n, że $|\alpha_n| = \|\alpha\|_\infty$.

   Rozwiązanie: Załóżmy najpierw, że istnieje takie n, że $|\alpha_n| = \|\alpha\|_\infty$. Niech x będzie ciągiem składającym się z samych zer i jednej jedynki, która jest na n-tym miejscu. Wówczas oczywiście $\|x\| = 1$, a ponadto $P_\alpha(x) = \alpha_n$, a więc $|P_\alpha(x)| = |\alpha_n| = \|\alpha\|_\infty$, czyli funkcjonał osiąga swoją normę na sferze jednostkowej. Załóżmy teraz, że dla każdego n mamy $|\alpha_n| < \|\alpha\|_\infty$ i oszacujmy wartość $P_\alpha(x)$ dla dowolnego $x \in \ell^1$, takiego że $\|x\|_1 = 1$. Istnieje takie N, że $x_N \neq 0$, ale w takim razie $|\alpha_N x_N| < \|\alpha\|_\infty |x_N|$ (istotne jest, że nierówność jest ostra). W tej sytuacji
$$|P_\alpha(x)| = \left| \sum |\alpha_n x_n| \right| \leq \sum |\alpha_n x_n| < \sum \|\alpha\|_\infty |x_n| = \|\alpha\|_\infty \|x\|_1 = \|\alpha\|_\infty ,$$

a skoro druga nierówność jest ostra (bo jest ostra co najmniej dla $n = N$), to nie ma w sferze jednostkowej takiego x, dla którego $P_\alpha(x) = \|\alpha\|$.

3. Pokazać, że jeśli przestrzeń V jest refleksywna, to każdy funkcjonał na V osiąga swoją normę na sferze jednostkowej.

Rozwiązanie: Przede wszystkim przypomnijmy definicję przestrzeni refleksywnej. Nie wystarczy, żeby istniał izometryczny izomorfizm między V a V^{**} — izomorfizmem tym musi być kanoniczne zanurzenie V w V^{**}, czyli odwzorowanie przyporządkowujące dowolnemu $v \in V$ element $F_v \in V^{**}$ zadany wzorem

$$F_v(P) = P(x) \text{ dla dowolnego } P \in V^*.$$

Przejdźmy do dowodu zadanego twierdzenia. Niech $P \in V^*$. Z tw. Hahna-Banacha istnieje funkcjonał $F \in V^{**}$, taki że $\|F\| = 1$ i $F(P) = \|P\|$. Ponieważ jednak V jest refleksywna, to F musi być postaci $F_v(P) = P(v)$ dla pewnego $v \in V$. Mamy zatem $\|P\| = F_v(P) = P(x)$, przy czym $\|v\| = \|F_v\| = 1$, a więc P osiąga swoją normę na sferze jednostkowej.

4. Pokazać, że jeśli H jest przestrzenią Hilberta, $x_n, x \in H$, ciąg (x_n) zbiega słabo do x i $\|x_n\| \to \|x\|$, to x_n zbiega do x w normie.

Rozwiązanie:

$$\|x_n - x\|^2 =< x_n - x, x_n - x >= \|x_n\|^2 - < x_n, x > - < x, x_n > + \|x\|^2 .$$

Słaba zbieżność x_n do x oznacza z definicji, że dla każdego funkcjonału $P \in H^*$ mamy $P(x_n) \to P(x)$. Ale funkcjonały na przestrzeni Hilberta powstają jako iloczyny skalarne, a więc dla każdego $y \in H$ mamy $< x_n, y > \to < x, y >$, a ponieważ sprzężenie nie popsuje nam zbieżności, to również $< y, x_n > \to < y, x >$. W szczególności zatem $< x_n, x > \to < x, x >= \|x\|^2$ i $< x, x_n > \to \|x\|^2$. Widzimy więc, że

$$\|x_n - x\|^2 =< x_n - x, x_n - x >= \|x_n\|^2 - < x_n, x > - < x, x_n > + \|x\|^2 \to$$
$$\to \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0.$$

Zestaw B

1. Określmy operator $T : \ell^1 \to \ell^1$ następująco

$$(Tx)_n = \frac{x_n}{n}.$$

Pokazać, ze T jest operatorem liniowym ciągłym. Obliczyć jego normę.

Rozwiązanie: Liniowość T jest oczywista. Ciągłość operatora jest równoważna jego ograniczoności, sprawdźmy zatem, jak norma Tx ma się do normy x. Dla dowolnego $x \in \ell^1$ mamy

$$\|Tx\|_1 = \sum |(Tx)_n| = \sum \frac{|x_n|}{n} \leq \sum |x_n| = \|x\|_1\,,$$

zatem $\|T\| \leq 1$. Ponadto $T(1,0,0,0,\ldots) = (1,0,0,\ldots)$, a więc $\|T\| = 1$.

2. Niech odwzorowanie $P : c_0 \to \mathbb{R}$ będzie określone następująco:

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}.$$

- Pokazać, że P jest funkcjonałem liniowym ciągłym i $\|P\| = 2$.

  Rozwiązanie: Liniowość P jest ewidentna. Ponadto

$$|Px| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^{n-1}} \leq \|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2\,\|x\|_\infty\,,$$

  zatem $\|P\| \leq 2$. Ponadto dla ciągu $x^k = (1,1,\ldots,1,1,0,0,0,0,\ldots)$ mającego k jedynek, a potem zera, mamy

$$\left|P(x^k)\right| = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^{n-1}} \to 2,$$

  a skoro $\left\|x^k\right\|_\infty = 1$, mamy $\|P\| = 2$.

- Pokazać, że P nie osiąga swojej normy na żadnym elemencie sfery jednostkowej.

Rozwiązanie: Niech $x \in c_0$ i $\|x\| = 1$. Oznacza to, że dla każdego n mamy $|x_n| \leq 1$, a ponieważ $x_n \to 0$, to dla co najmniej jednego n (a nawet dla prawie wszystkich n) zachodzi nierówność ostra. W takim razie

$$|P(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^{n-1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 = \|P\|,$$

przy czym wobec powyższych uwag druga nierówność na pewno jest ostra. Oznacza to, że nie ma w sferze jednostkowej takiego x, dla którego $P_(x) = \|P\|$.

3. Pokazać, że jeśli $P \in V^*$, gdzie V jest przestrzenią refleksywną, to istnieje $v \in V$, taki że $\|v\| = 1$ i $|P(v)| = \|P\|$.

Rozwiązanie: To zadanie było takie samo w obu grupach, więc rozwiązanie jest w części A.

4. Niech V będzie przestrzenią Banacha. Pokazać, że jeśli ciąg (v_n) elementów V zbiega w normie do pewnego v, a ciąg (P_n) elementów V^* zbiega $*$-słabo do P, to ciąg liczbowy $P_n(v_n)$ zbiega do $P(v)$.

Rozwiązanie: Przypomnijmy najpierw definicję $*$-słabej zbieżności: Ciąg funkcjonałó $P_n \in V^*$ zbiega $*$-słabo do $P \in V^*$, jeśli dla każdego $v \in V$ ciąg liczbowy $P_n(v)$ jest zbieżny do $P(v)$.

Przejdźmy teraz do samego zadania. Przede wszystkim dodajmy i odejmijmy pod modułem $P_n(v)$, otrzymując oszacowanie

$$|P_n(v_n) - P(v)| \leq |P_n(v_n) - P_n(v)| + |P_n(v) - P(v)|.$$

Dalej:

$$|P_n(v_n) - P_n(v)| \leq \|P_n\| \|v_n - v\| \to 0,$$

ponieważ ciąg $\|P_n\|$ jest ograniczony, a $\|v_n - v\| \to 0$ z założenia. Z kolei

$$|P_n(v) - P(v)| \to 0$$

z definicji $*$-słabej zbieżności. Ostatecznie zatem prawa strona pierwszej uzyskanej nierówności zbiega do 0, co kończy dowód.